La négation des mathématiques ... et du reste

Jean-Pierre Ferrier, avril 2007

Avec les "fiches élève", on commence à se faire une idée précise de la nouvelle "épreuve pratique de mathématiques" qui doit faire partie du baccalauréat en série scientifique [IG].

Pour continuer de satisfaire les importateurs de calculatrices et autres matériels, il fallait installer solidement et définitivement l'outil informatique dans l'enseignement des mathématiques, et pour cela maintenir sa présence au baccalauréat. Or l'usage des calculatrices, que l'Inspection générale de mathématiques a rendu obligatoire au baccalauréat depuis deux décennies alors que les règlements ne l'ont jamais stipulé, commençait à poser de sérieux problèmes avec les capacités de communication sans fil de ces machines. Prévoyant l'éventualité d'une interdiction prochaine des fameuses calculatrices, on a imaginé cette épreuve pratique en remplacement. Bien loin d'y gagner, l'enseignement des mathématiques y perdra encore beaucoup plus qu'avec des machines dont la nuisance continuera de s'exercer dès l'école primaire.

Oublions cependant les raisons de cette innovation. Elle aura eu au moins un mérite, celui d'avoir étalé au grand jour la vision des mathématiques qu'a l'institution, représentée ici par l'Inspection générale. On va constater que cette vision est erronée au point que ce qu'on nous présente aujourd'hui comme de la Science n'en a aucun des caractères.

Un petit détour par la modélisation.

Il faut commencer par parler de ce qu'on ne peut appeler qu'une "modélisation débile" et qui est présentée, depuis quelques années, comme le fleuron de notre enseignement. De quoi s'agit-il? Partant de données expérimentales, on cherche simplement une fonction qui fournit à peu près les mêmes résultats. On considère alors qu'on a fait oeuvre scientifique. Précisément, comme l'élève ne dispose d'aucune connaissance intime sur les fonctions, faisant confiance à sa calculatrice pour traiter les questions à leur sujet, on lui propose une formule dont on lui demande d'admettre "qu'elle modélise la situation". Parfois cette formule est sérieuse, tirée de la physique, parfois elle est sortie du chapeau, pour les besoins de l'exercice; c'est souvent ce dernier cas qu'on rencontre dans les exercices à coloration biologique. Cependant les deux cas se valent, puisque rien ne permet à l'élève de les distinguer.

Un exemple extrême de modélisation débile a donné lieu à un TPE injustement méconnu. On a pris une photographie du soleil pour laquelle on a découpé le contour irrégulier en quelques arcs de coube, et on a essayé d'approcher chacun avec un polynôme du 16ème degré. Peut-on vraiment penser que cette activité relève de la Science, qu'elle explique quoi que soit ?

Un exemple tout aussi ridicule a fait l'objet d'un exercice proposé par l'Inspection générale [EZ]. Il s'agissait d'étudier l'évolution d'une année sur l'autre d'une population de coccinelles. Une formule de récurrence était balancée sans que le sens des constantes soit même évoqué. On devait "admettre" que la population des coccinelles ne pouvait pas dépasser un million d'individus. Sans doute un règlement le leur interdisait-il, qu'elles n'étaient évidemment pas censées ignorer.

La modélisation peut être sérieuse sans être explicative, mais cela caractérise l'activité de l'ingénieur. Par exemple, en typographie informatique, on représente le dessin des caractères avec des polynômes du troisième ou du quatrième degré. Il n'y a rien à expliquer. Seule compte l'efficacité de la technique, en particulier la concision de l'information nécessaire. Il arrive que la modélisation gigantesque, dont l'industrie a besoin, ressemble un peu à cet exemple. Il y a beaucoup de paramètres, que l'on identifie par des expériences sans prétendre leur donner un sens. Il serait incorrect d'affirmer qu'aucune traduction ne peut exister dans l'enseignement. Rechercher une fonction simple ayant une allure donnée est un exercice formateur. Cependant il faut absolument se garder d'y voir une initiation à la démarche scientifique et de s'en servir de fil directeur pour construire un programme de mathématiques.

La Science, en particulier la physique, commence avec l'exigence d'explication. Même lorsque la physique moderne fait sortir certains concepts des équations elles-mêmes, de sorte qu'il arrive au physicien de dire qu'il ne comprend pas ce qu'il fait, elle reste explicative. En mathématiques, où la distance avec le monde réel est plus grande encore, on a aussi toujours besoin d'expliquer.

Nous allons voir que la modélisation débile s'applique également à l'intérieur des mathématiques elles-mêmes, où elle a un équivalent tout aussi éloigné de la Science.

Expériences en mathématiques.

Les mathématiques sont aussi, à leur manière, une science expérimentale. Prenons l'exemple de la géométrie, dont on s'accorde à considérer qu'elle fait partie de cette discipline. Il est difficile de contester le fait, souligné par Rudolf Bkouche, que c'est la première science physique. La géométrie d'Euclide est inspirée par l'expérience du mouvement des corps solides.

Même les mathématiques pratiquées de nos jours laissent une place à l'expérience, alors que les problèmes sont le plus souvent posés de façon interne à la discipline, y compris lorsque leur origine est physique. Cependant cela n'affecte pas la démarche, laquelle reste conforme à celle de la Science en général. Devant un phénomène ou un problème qui se pose naturellement dans le cadre des connaissances en vigueur, on met en place les outils pour l'étudier rationnellement.

A cette occasion, on peut être amené à expérimenter, par exemple sur des cas particuliers. Cependant on ne se contente pas de noter ce qui se passe, on essaie déjà de comprendre ce qui se passe. En fait on ne peut rien noter sans chercher déjà quelque chose. Qu'est-ce qui est notable et qu'est-ce qui ne l'est pas?

De plus il faut que ce qu'on aura noté, si ce n'est déjà pas conforme à ce qu'on attendait a priori, s'inscrive, au moins potentiellement, comme une étape dans la résolution que l'on cherche. Si c'est le cas, on est en droit de penser qu'on a touché une propriété digne d'intérêt, permettant de progresser dans la résolution. Parfois cette propriété sera vite établie pour être noyée dans un travail qui va progresser bien au-delà. Parfois aussi on s'en contentera provisoirement et on s'y attaquera de façon spécifique, remplaçant le problème initial par un nouveau problème, moins ambitieux.

En reprenant éventuellement le processus avec de l'opiniâtreté et de la chance, on en vient à dégager les contours de ce qui pourrait être un solution, partielle ou complète, du problème sur lequel on travaille maintenant. Il peut se faire que la solution arrive toute armée de sa démonstration. Il peut aussi se faire que n'on ne dispose encore que de morceaux de cette démonstration. Si l'on parvient à les recoller on aura gagné. De toute façon on ne sera jamais parti de rien.

Maintenant il se peut que l'on échoue dans la tentative de recoller les morceaux. On se demandera si la solution avancée était bien valide. Peut-être va-t-on trouver une exemple contraire. Dans ce cas on reformulera la proposition et on recommencera. Il reste le cas où l'on ne peut ni démontrer ni mettre en défaut la propriété concernée. On la met alors sur la place, sous la forme d'une conjecture, pour y intéresser la communauté des chercheurs.

Et routine.

Il ne faudrait pas croire que le travail du mathématicien consiste à inventer en permanence. La plupart du temps il applique des méthodes éprouvées, en les adaptant un peu au besoin.

Il lui faudra donc reconnaître des situations classiques ou y ressemblant suffisamment pour pouvoir bénéficier d'un traitement classique.

Cela signifie que le mathématicien aura, lui aussi, besoin d'apprendre sans cesse, soit des théories établies depuis longtemps par d'autres, mais qui ne semblaient pas s'appliquer dans son sujet de prédilection, soit des résultats récents de ses collègues. Pour cela il pourra essayer de refaire tout seul, mais guidé, la démarche, prenant éventuellement des cas particuliers pour se faire la main. Ce faisant il n'est pas très loin de l'élève dans la classe.

La négation de la Science.

Nous allons voir que la description qu'on vient de faire des mathématiques s'oppose radicalement à la façon dont la discipline est vue par l'institution scolaire, notamment avec le triptyque "observer, conjecturer, démonter", qui n'est qu'une modélisation débile à l'intérieur des mathématiques elles-mêmes.

D'abord, d'où sortent les problèmes, qu'on appelle *problématiques* chez les nouveaux pédagogues? Il n'est pas acceptable qu'ils soient tirés de n'importe quoi, voire qu'il provienne d'une modélisation dont on ne connaîtrait pas le processus. C'est pourtant bien ce qui arrive. La grande majorité des thèmes retenus pour cette nouvelle "épreuve pratique" se classent dans cette catégorie. Le sujet 025 sur la suite

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$$

fait partie ce ceux-là, alors qu'il y avait pourtant un problème assez naturel derrière, le calcul des sommes partielles itérées de la suite constante 1. En revanche le sujet 001 sur la suite récurrente

$$u_{n+1} = u_n + 2n - 11$$

s'inscrit déjà dans un cadre plus naturel, celui des équations différentielles discrètes.

Il faut bien voir qu'on ne proposera pas en permanence à l'élève de résoudre des problèmes naturels. On ne doit pas confondre la logique d'apprentissage, dans laquelle il se trouve, et la logique de production, qui ne concerne que les mathématiciens professionnels. On retiendra seulement que si on veut le mettre, à l'occasion, dans la peau d'un chercheur, ce sont des problèmes naturels qu'il faut lui soumettre, avec du temps pour y réfléchir, ce qui s'accorde mal avec les exigences d'une épreuve. On noterait que la suite récurrente proposée plus haut, avec les coefficients qui ont été choisis, n'est pas plus naturelle que cela d'ailleurs.

Seuls les problèmes naturels justifient qu'on cherche à les étudier par tous les moyens. Pour les autres, ce qui en fait leur intérêt n'est pas de trouver la solution à tout prix, c'est de mettre en oeuvre des méthodes intéressantes. Ce n'est pas la réponse à la question qui importe, c'est la façon dont on l'obtient. De ce point de vue, même un thème idiot, comme celui du sujet 043 où il s'agit de montrer que les points de la courbe $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ ne sont pas sur un cercle, peut donner lieu à un travail intéressant de la part de l'élève. A condition, bien sûr, qu'il s'oriente ou qu'on l'oriente dans une stratégie instructive.

Or aucune des stratégies proposées dans les fameuses "fiches élève" de cette nouvelle épreuve de mathématiques n'est instructive. Mettons de côté l'utilisation du tableur, qui a ses vertus, car c'est une petite étape vers la programmation; il se trouve qu'on y fait peu appel, comme par hasard. Dans beaucoup d'exemples, le sujet n'a été posé que pour obliger l'élève à utiliser un logiciel de géométrie dynamique. Cela va lui demander du travail, car ces logiciels n'en sont pas encore au stade où ils s'adaptent aux questions qu'on se pose en géométrie. Autant exiger de programmer trois magnétoscopes de marque différente. Lesdits logiciels nécessitent de penser le problème d'une manière spécifique. Et cet exercice fastidieux n'est absolument d'aucune utilité pour résoudre la question posée.

Il ne s'agit surtout pas de faire ici le procès de l'informatique. A l'occasion, conduire rigoureusement une démarche algorithmique, comme cela est nécessaire en vue d'une bonne programmation, est très instructif. Par exemple les invariants de boucle sont une alternative puissante du raisonnement par récurrence. Mais ici ce n'est pas la science informatique qui est concernée. Ici c'est la boite noire qui donne la réponse. A ce compte là, le coup de téléphone à un ami serait moins hypocrite.

Les logiciels de géométrie dynamique font appel à la géométrie analytique pour leurs procédures d'un côté et à une structuration abstraite des données de l'autre. Se poser la question de savoir comment ils fonctionnent serait très intéressant, mais sans doute pématuré au lycée. De toute façon ces logiciels ne sont introduits dans l'enseignement que parce qu'il faut faire acheter des machines. Travailler à la main serait aussi efficace dans les exemples choisis, et beaucoup plus parlant.

On justifie l'appel à l'outil informatique parce qu'il permet d'*observer*, premier élément du triptyque. Malheureusement, nous avons vu que ce type d'observation béate ne se présentait jamais en mathématiques.

Il n'existe pas non plus, en mathématiques, de situation non triviale à partir de laquelle on puisse directement émettre de conjecture, ou *conjecturer* pour employer le la langue des pédagogues. Nous avons vu que cette forme de communication faisait suite à de nombreuses tentatives infructueuses.

Dans le sujet 035 sur la demi-vie, on demande de faire une conjecture sur une concentration qui suit la loi exponentielle. Il s'agit sans doute de faire dire qu'elle tend vers 0. D'abord on n'est pas bien certain que la l'observation des valeurs qui apparaissent dans les colonnes du tableur y conduise. On voit des valeurs de plus en plus petites, mais qui ne décroissent pas très vite. Evidemment on peut augmenter considérablement le nombre de lignes. Encore faut-il penser à le faire. Cela suppose que l'on cherche déjà quelque chose. Encore une fois, on cherche la propriété *avant* de l'observer.

On se demande d'ailleurs comment on peut noter ce genre de question. L'élève qui conjecture la décroissance de la suite et la démontre n'a-t-il pas rempli le contrat?

Maintenant l'hypocrisie est poussée ici à son comble. D'abord le phénomène n'a pas seulement été étudié en classe. C'est le fil directeur commun des enseignements de mathématiques et de physique, l'unique exemple de pluridisciplinarité relevé par les inconditionnels de la chose à l'Académie des sciences [AS] et qu'un magnifique travail conjoint de deux GEPS a produit pour les documents d'accompagnement des programmes [DA]. Comme si cela ne suffisait pas, on fait constater que la concentration est divisée par 2 au bout d'un certain temps. On n'a rien pu observer ni rien pu conjecturer sans aide extérieure.

Terminons sur ce sujet en ajoutant qu'il est mathématiquement contradictoire de façon rédhibitoire et ignorant des incertitudes sur les valeurs comme on en trouve toujours en physique.

Venons-en au dernier élément du triptique, *démontrer*. Il y a eu hésitation de l'Inspection générale à ce propos. Au début, on a entendu dire que la capacité de démontrer étant évaluée dans l'épreuve écrite, il n'y avait pas lieu de la tester dans l'épreuve pratique. Cela a sans doute choqué pas mal de collègues, pour qui on ne pouvait pas mettre l'étiquette "mathématique" à une épreuve consistant seulement à appliquer la consigne et observer. En plus il fallait prouver que cette expérimentation sur machine s'inscrivait, comme une étape importante, dans l'activité mathématique. Il y a donc des démonstrations demandées sur les fiches. En général cette partie de l'épreuve n'a aucune relation avec la partie dite "expérimentale". La seule raison de cette dernière est qu'il faut parfois, en fait dans un très petit nombre de cas, connaître le résultat escompté pour faire la démonstration. Dans une épreuve écrite, on donne les résultats intermédiaires pour permettre au candidats ayant buté sur un point d'avancer. Ici on a trouvé une autre astuce : l'aide apportée par l'examinateur.

Puisqu'il s'agit d'une épreuve pratique évaluée en séance, je propose de détourner ainsi la procédure. L'examinateur indique en détail toutes les manipulations. Ensuite, après avoir vérifié que tout le monde avait la bonne image, il laisse travailler les élèves. Il exige surtout d'eux qu'ils rédigent proprement les démonstrations. Le côté pratique de cette exigence vaut bien celui des manipulations débiles.

Retour sur la physique.

Revenons sur le sujet 035 sur la demi-vie, pour voir comment s'y traduit l'admirable effort d'interdisciplinarité dont nous avons parlé.

A-t-on au moins fait l'effort de faire apparaître partout les unités, de respecter les dimensions des grandeurs physiques? On nous dit que l'unité de temps sera la minute et qu'on "prendra $C_0 = 1$ comme unité de concentration initiale à la fin de l'injection", ce qui nous enrichira d'un modèle à retenir pour nous exprimer. Ensuite on ne voit plus jamais apparaître que des nombres sans unité, parfois même "des entiers" tout simplement, car parler "de nombres entiers" écorcherait les oreilles des pédagogues.

L'idée même qu'en physique on attache toujours aux données numériques une certaine précision n'a pas effleuré les rédacteurs. Après avoir choisi $k = 0,035$ sans autre indication, on demande "d'encadrer", de façon exacte bien sûr, la demi-vie entre "deux entiers consécutifs". Or on ne connaît k qu'à 1 ou 2% près. Plus grave tout le calcul est fait à partir d'une simulation discrète. Cette fois on confond la réalité et le modèle, ignorant que l'on a introduit une erreur, en gros du même ordre que l'incertitude sur k.

La locution “à 10^{-2} près” ne s'applique d'ailleurs pas à *une* mais la *la* valeur approchée. Il y a une différence entre les mathématiques enseignées au lycée et le sens commun. Dans le cas d'une incertitude de $0,5.10^{-3}$ environ, je prendrai $1,00$ pour $0,9949$; or il faut impérativement choisir $0,99$, voire $0,9900$ puisque c'est pareil.

Faut-il s'étonner après cela que les élèves fassent le désespoir des enseignants de physique?

Algorithmes.

Pour justifier l'utilisation des machines, on peut mettre en avant des problèmes qui ne sont pas d'ordre mathématique, mais d'ordre algorithmique. C'est dans cette catégorie qu'il faut ranger le jeu “Flippin' Coins”[FC], même si sa résolution est de nature mathématique, pour des raisons qui apparaissent fortuites, étant donné le caractère arbitraire et purement ludique de la question. Le problème dit des “spirolatères”[Sp], qui est proposé en quatrième pour développer chez les élèves une attitude de recherche, a son origine dans l'algorithmique graphique, alors que la bonne façon de le poser et de le résoudre est d'y voir une équation différentielle discrétisée dont on cherche si elle possède une solution périodique.

Les fiches dont il est question ici se terminent par le problème bien connu dit de Syracuse. Voilà également une question dont la justification n'est pas mathématique. Dans cet exemple, pour le moment, on ne dispose pas de solution.

Si l'on veut prendre des questions de ce genre pour en faire des exercices, ce n'est pas l'activité mathématique induite qui peut valider le choix, puisqu'il n'y en a pas, mais l'apprentissage de l'algorithmique. Une condition évidente, sans laquelle tout ce qu'on peut faire sera plus destructeur qu'utile, est de respecter quelques principes de base de cette science.

Or que voit-on dans le sujet 052 qui traite du problème de Syracuse? On y présente un algorithme à l'intérieur duquel on est amené à “réappliquer” l'algorithme comme s'il s'agissait d'un traitement récursif, ce qui n'est pas, bien sûr. On confond donc l'algorithme complet et le traitement conditionnel que l'on y itère.

A côté du discours, figure un magnifique organigramme qui a les défauts des organigrammes. Il y a une sortie mais pas d'entrée. Il serait bon que l'Inspection générale prenne conscience que l'exigence de structuration dans l'écriture des algorithmes, y compris en langue naturelle, n'est pas une coquetterie, mais une manière efficace de faciliter l'élaboration des algorithmes en réduisant le nombre des traitements à connaître et en clarifiant les points à considérer. Par exemple, ne pas vouloir parler d'itération, fait que l'on a du mal à comprendre ce que sera la longueur. Celle de la suite 5-16-8-4-2-1, donnée à titre d'exemple et qui est censée être le “nombre d'entiers de cette suite finie” est 5. Pourquoi pas 6 ou 4?

Bref, nier les mathématiques et la physique ne suffit pas; il faut aussi nier l'informatique.

Et la langue?

Le sujet 019, relatif au codage par multiplication des codes ASCII modulo 256 par un nombre inversible, propose un texte de Mignon McLaughlin traduit ainsi :

“*Dans l'arithmétique de l'amour, un plus un égal...*”

Le message a été coupé parce qu'il faudra en décoder la fin. On s'attend cependant à une coupure sur un espace entre les mots. En fait, quand on décrypte la fin, on s'aperçoit qu'elle reprend le “l” de “égal” pour le faire suivre d'un espace.

Autrement dit, le rédacteur ne sait pas que, dans cette phrase, il fallait écrire "égale", c'est-à-dire conjuguer le verbe "égaler" à la troisième personne du singulier. D'ailleurs, dans la vraie citation de McLaughlin, on trouve

"... *one plus one equals* ..."

où le verbe "to equal" a bien été conjugué de la sorte. Au passage ce petit exemple montre que la traduction d'une langue dans une autre pose moins de problèmes, en mathématiques, que les conventions grotesques des pédagogues.

Ce n'est pas tout. L'apostrophe a été transformée en espace alors qu'il existe pourtant un code dans la convention ASCII, qui est 39. Phénomène plus gênant, les accents ont disparu. Là il y a un vrai problème, car la convention, qui ne concerne que les codes de 32 à 127 contrairement à ce que l'énoncé laisse supposer, ne les gère pas. Le codage peut dépendre du système. Il aurait au moins fallu le dire, ou prendre la version originale de la citation, ou encore choisir une phrase non accentuée.

De façon plus générale, l'Inspection générale s'honorerait en donnant l'exemple du respect de la langue, et notamment de la grammaire, dans la rédaction des sujets. Il est ainsi généralement convenu qu'un terme peut être assimilé à un groupe nominal et une relation à une proposition; c'est la raison pour laquelle il faut penser "=" comme un groupe verbal : "égale" ou "est égal à".

Chaque nouveau symbole doit être introduit avec un nom qui en fixe le genre; c'est absolument nécessaire pour l'accord. Le principe est bien respecté dans un sujet tel que 002 : le plan $\mathcal{P}$, le point O, le cercle (Γ), le centre O, le lieu $\mathcal{L}$. C'est moins le cas dans les sujets d'analyse.

Il y a aussi un règle, dite de Godement, qui stipule qu'un symbole mathématique ne doit jamais suivre un signe de ponctuation. Quand on lit

2. n étant donné ...

dans le sujet 001, le lecteur un peu distrait peut croire qu'on fait le produit de 2 par n. Dans le sujet 003

– $[AM]$ ...

peut laisser penser qu'on s'intéresserait à l'opposé de $[A, M]$ (symbole qui désigne la longueur AM à l'extérieur de nos frontières). On évitera en particulier cette ligne du sujet 007 :

– Proposition 2 : Pour tout réel x, $e^x > 3x$.

Déjà la virgule sépare deux symboles. Contrairement à ce que les nouveaux puristes s'imaginent, le "pour tout" doit être pacé après la relation; se rapporter à Bourbaki par exemple. On remarque aussi la majuscule après le signe ":". Comble de malchance, on s'obtine à utiliser l'adjectif "réel" comme un substantif qu'il n'est pas. On doit parler de nombre entier, rationnel, réel ou complexe. Le mot "complexe" est aussi utilisé comme substantif en français et en mathématiques, mais avec un sens différent.

Finalement, cette belle prétention d'interdisciplinarité ne résiste pas dès le tout premier exemple où il aurait précisément fallu penser aux autres disciplines.

Que faut-il conclure? Sans doute qu'un peu de modestie, un peu de réalisme, donc des formulations moins pédantes et des prétentions moins délirantes, tout cela ne pourrait que faire du bien à notre enseignement. Pour cela il faudrait que l'institution ait la volonté d'apporter à chacun une instruction digne, et qu'elle mette la propagande et les intérêts commerciaux au vestiaire.

[AS] Académie des sciences, *Avis de l'académie des sciences sur l'enseignement scientifique et technique dans la scolarité obligatoire : école et collège*, les Cahiers du débat, Fondation pour l'innovation politique, 2005, en ligne sur le site
fondapol.org

[DA] Direction de l'enseignement scolaire, *Document d'accompagnement des programmes de terminale S*, en ligne sur le site
eduscol.education.fr

[EZ] Direction de l'enseignement scolaire, *Exemples d'exercices série S année 2004, exercice 18 (scolarité obligatoire)*, 2003, en ligne sur le site
eduscol.education.fr

[FC] B. B. Newmann, *The Flippin' Coins Problem*, Mathematics Magazine, vol 54, 2, mars 1081.
N.B. On trouvera l'ènoncé du problème à défaut de la solution qui s'impose.

[IG] Inspection générale de mathématiques, *Epreuve pratique de mathématiques, fiches élèves*, 2007, en ligne à l'adresse
http://igmaths.free.fr/Feleves.pdf

[Sp] P. Le Gall, F. Drouin, *Activités de recherche au service de l'apprentissage des mathématiques*, Pôle académique de soutien à l'innovation, 2006, en ligne à l'adresse
www3.ac-nancy-metz.fr/pasi/article.php3?id_article=151

Annexe : "productions" d'élèves

Il s'agit d'élèves indisciplinés qui n'ont pas voulu allumer leur ordinateur et répondu directement aux questions posées. Peut-être avaient-ils entendu dire qu'à l'époque ancestrale des épreuve d'épure, les candidats à l'ENS pouvaient se contenter de rédiger une notice lorsque cette dernière résolvait le problème, au sens étymologique : le dissolvait littéralement.

Sujet 001. *Production de Gérard.*

Sans machine, j'ai calculé $u_1 = -11$, $u_2 = -20$, $u_3 = -27$, $u_4 = -32$. J'ai fait les différences et constaté qu'elles étaient en progression arithmétique. J'ai pensé que la différence seconde, valant 2, représentait une accélération. J'ai donc cherché u_n sous la forme $n^2 + a.n$ et j'ai ajusté avec u_1 pour trouver $a = -12$. Ensuite, pour occuper le temps libre, j'ai calculé jusqu'à u_{12} pour trouver 0 comme je le savais déjà.

Production d'Hubert.

J'ai résolu

$v_(n+1) - v_n = 2n$ avec $v_0 = 0$, qui donne $v_n = n(n-1)$ comme somme d'une série arithmétique,

$w_(n+1) - w_n = 11$ avec $w_0 = 0$, qui donne $w_n = -11.n$ comme terme général d'une série arithmétique;

j'ai ajouté pour trouver $u_n = n(n-12)$.

Sujet 002. *Production d'Ariane.*

J'essaie naturellement de calculer le vecteur $\vec{OM'}$ en fonction du vecteur $\vec{OM}$; j'obtiens la somme de $-3\vec{OM}$ et d'un vecteur constant. La transformation est la composée d'une homothétie de rapport -3 et d'une translation. Le lieu est donc un cercle de rayon triple. Quant à la transformation, je peux montrer qu'elle a un point fixe unique et que c'est l'homothétie de rapport -3 centrée en ce point.

Sujet 003. *Production de Bernard.*

Partant du côté AB, je construit un triangle équilatéral ABE pointé vers le bas.

Bien qu'on ne me le demande pas, je note que déplacer horizontalement M (qui sur la médiatrice de AB) en N augmente $MA + MB$. J'ai reconnu la règle de la réflexion : soit A' le symétrique de A par rapport à M; on a $MA + MB = AA' < AN + NA' = AN + NB$.

A fortiori augmente-t-on $MA + MB + ME$. Cette dernière quantité ne peut alors avoir de minimum qu'en O : on la diminue en ramenant M sur une médiatrice parallèlement au côté correspondant. Or, sur la médiatrice de AB, minimiser $MA + MB + MH$ équivaut à minimiser $MA + MB + MC$. Donc le minimum est atteint au centre O de ABE exactement.

En conclusion les angles en M doivent être tous égaux à 120°; si on préfère l'angle theta demandé vaut 30°.

NB. Bernard a supposé implicitement que le minimum est atteint.

Sujet 004. *Production d'Alfred.*

Pour résoudre $\log x/x^2 = k$, j'ai appris à étudier les variations de la fonction, ici pour $x > 0$. Sa dérivée est $(1 - 2\log x)/x^3$. La fonction décroît jusqu'à $1/\sqrt{2}$, où elle vaut $1/2e$, puis croît après. Comme ses valeurs limites sont $-\infty$ en 0 et 0 en ∞, il y a aura une solution si $k <= 0$, deux si $0 < k < 1/2e$, une si $k = 1/2e$ et aucune si $k > 1/2e$. Je ne comprends pas la question 1(b) : par exemple $k = 2$ est un valeur exacte pour laquelle l'équation a une unique solution; pourquoi approcher?

Sujet 005. *Production d'Isidore.*

Si v_n admet une limite l, je sais que $l = -l/2 + 6$, d'où $l = 4$. J'obtiens $w_{n+1} = -w_n/2$ et je reconnais la définition d'une suite géométrique. Alors $v_n = 6+(v_0-6)2^{-n}$ d'après mon cours.

Sujet 007. *Production de Régine.*

J'essaie de connaître la signe de $e^x - ax$ pour $a \neq 0$: pour cela je dérive en $e^x - a$. On ne me demandait pas le cas $a < 0$, mais je réponds : la fonction est croissante; comme ses limites sont $-\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$, elle négative, puis positive.

Pour $a > 0$ la fonction est décroissante avant $\log a$, croissante après; comme sa limite est $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$, elle s'annule si et seulement si sa valeur en $\log a$ est négative, i.e. si $a(1 - \log a) \leq 0$, soit $a \geq e$.

Donc, pour $a = 1$, la courbe est au-dessus de la droite (1 est vrai), pour $a = 3$ la fonction prend des valeurs négatives (2 est faux), pour $a = e$, la droite touche la courbe un point en restant du même côté et elle y est tangente.

Sujet 008. *Production de Sylvie.*

J'ai constaté que $\log T$ et $\log r$ étaient à peu près alignés sur une droite. Donc $\log T = a \log r + b$ et $T = e^b r^a$. La pente a semble à peu près 3/2, d'où le résultat qu'on me demande.

J'ai toutefois un doute, car T et r ne sont pas des nombres. Ne fallait-il pas comparer par exemple à la terre et considérer T/T_0 et r/r_0. Heureusement les valeurs de T_0 et r_0 n'interviennent que dans b.

Sujet 011. *Production de Catherine.*

La réponse à la question 3 est dans mon cours (et dans la mémoire de ma machine). Je ne peux pas dire si la simulation cohérente ou non avec les valeurs théoriques, car cela n'a aucun sens. En revanche je sais que les événements $S = 3$ et $D = 1$ ne sont pas indépendants : en effet $S = 3$ signifie qu'on a obtenu 1 trois fois; l'événement $S = 3$ et $D = 1$ et l'événement $S = 3$ sont donc les mêmes; or la probabilité de l'événement $D = 1$ n'est pas égale à 1.

Sujet 012. *Production de Dorothée.*

Les points O et B sont sur le cercle de diamètre AB, dont le centre est I. En particulier $IO = AC/2$ et le point I décrit un quart de cercle de ce rayon. De plus les angles inscrits AOB et ACB sont égaux comme angles inscrits; le premier est donc constant. Le point B décrit donc un segment d'une droite passant par O.

Sujet 013. *Production de Thérèse.*

N'ayant pas vu l'intérêt des questions précédentes, j'ai résolu la question finale. Si x, y sont les coordonnées de H (car H a l'abscisse de A), j'ai exprimé l'orthogonalité des vecteurs $\vec{BH} = (x+1, y)$ et $\vec{AC} = (1-x, -1)$ pour obtenir $y = 1 - x^2$. Le lieu est une parabole d'axe Ox et de sommet $(0, 1)$.

Sujet 016 *Production de Josiane (de la campagne).*

Pour $k = 2$, compte tenu de la précision exigée pour évaluer une consommation de carburant, j'ai pensé qu'on pouvait mesurer les distances au décimètre sur l'énoncé pour les valeurs extrêmes de HM (0 et 4) ainsi que trois valeurs intermédiaires (1, 2, 3) et comparer. J'obtiens ainsi

pour 0 km : $4 + 2 \times 3 = 10$
pour 1 km : $3 + 2 \times 3,2 = 9,4$
pour 2 km : $2 + 2 \times 3,6 = 9,2$
pour 3 km : $1 + 2 \times 4,2 = 9,4$
pour 4 km : 2x5 = 10

Je vois qu'on peut choisir M entre les kilomètres 1 et 3 comme on veut sans grande incidence sur la consommation. Cependant je choisis de rejoindre la route le plus loin possible car je n'aime pas créer des bouchons.

Production de Karl.

Le problème étant idiot, je ne me suis intéressé qu'à la question de savoir pour quelle valeur de k la solution directe était sensiblement équivalente à celle consistant à prendre M très près de F. Je considère N sur CF tel que $CN = CM$. Le triangle isocèle MCN admet deux angles presque droits. Le triangle presque rectangle MNF est donc presque semblable au triangle rectangle CHF. Alors approximativement $FM/FN = FC/FH = 5/4$. C'est $k = 5/4$ qui convient. Au moins j'ai l'impression d'avoir compris un phénomène.

Sujet 019 *Production de Véronique.*

Si j'ai bien compris il s'agit de voir que 7 est inversible modulo 256 et admet 183 comme inverse. Ici le calcul du PGCD de $256 = 2^8$ et de 7, qui vaut 1, me donne l'inversibilité et l'inverse : j'ai $256 = 36 \times 7 + 4, 7 = 2 \times 4 - 1$, d'où $1 = 2 \times 4 - 7 = 2 \times (256 - 36 \times 7) - 7 = 2 \times 256 - 73 \times 7$; l'inverse est -73 ou 183. Le sachant, je peux le vérifier directement : $7 \times 183 = 1281 = 1 + 5 \times 256$.

Sujet 021 *Production de Walter.*

Je n'ai vraiment pas vu l'intérêt de calculer x_k et y_k avant de simuler l'évolution. Je me suis mis tout de suite sur mon tableur pour écrire 1 dans B1 et $k = 0,1$ dans dans C1. Ensuite j'ai mis la suite des multiples de k dans la colonne A à partir de A1 et recopié cent fois vers le bas = A1 - C$1*A1 dans A2. J'ai trouvé une erreur sur $f(1)$ d'environ 5%. Je m'y attendais car $k - \log(1-k)$ se dérive en $k/(1-k)$ qui s'approche par k; si j'intègre j'approche $k - \log(1-k)$ par $k^2/2$. Or le logarithme du rapport entre e^{-nk} et $(1 - 1/n)^k$ est $n(k - \log(1-k))$. Pour $k = 1/n = 0,1$, cela donne 0,05. Quel ennui!

Sujet 025 *Production de Zoë.*

Considérons la suite constante 1 à partir de l'indice $n = 1$; la somme v_n jusqu'à n de ses termes vaut n; la somme w_n jusqu'à n des termes de v_n vaut $n(n+1)/2$; je suspecte la somme z_n jusqu'à n des termes de w_n de valoir $n(n+1)(n+2)/6$: par récurrence c'est immédiat. Or on me demande $u_n = 2z_{n-1}/n = (n^2-1)/3$.

Sujet 026. *Production d'Etienne.*

Je calcule le vecteur $\vec{AG}$ qui vaut $-k/(k^2+1)\vec{BC}$. J'en déduis que G se déplace sur une droite passant par A et parallèle à BC. Il y décrit un segment DE où $\vec{AD} = -\vec{AE} = \vec{BC}/2$. En effet la fonction $-x/(x^2+1)$, de dérivée $(1-x^2)/(1+x^2)^2$ est décroissante sur $[-1,1]$.

Sujet 27. *Production de Frédéric.*

Soit ABC un triangle isocèle en A. Si je déplace A en D parallèlement à BC je conserve l'aire, mais j'augmente le périmètre; j'ai reconnu la règle de la réflexion: si B' est le symétrique de B par rapport à A, alors $2AB = AA' < AD + DA' = AD + DC$.

Donc, à périmètre égal, si je déplace A je diminue l'aire. Par suite, pour maximiser l'aire, je dois rendre le triangle isocèle en chaque sommet. Seul le triangle équilatéral de périmètre donné maximise l'aire.

Sujet 029. *Production de Laurence.*

J'ai appris que $\mathrm{PGCD}(a,b) = \mathrm{PGCD}(a, b-a)$; donc

$$\begin{aligned}\mathrm{PGCD}(4n+1, 5n+3) &= \mathrm{PGCD}(4n+1, n+2)\\ &= \mathrm{PGCD}(n+2, -7) = \mathrm{PGCD}(n+2, 7)\end{aligned}$$

La condition demandée est que $n+2$ soit multiple de 7.

Sujet 030. *Production de Daniel.*

Conjecturer, quel grand mot! Qui n'a pas compris, avec un petit brouillon, que le cercle allait passer par I? On me dit de considérer une similitude de centre I, d'angle (IA, IB) et de rapport IO/IA? Considérons. L'image de O est B car $(IO, IB) = (IA, IB)$ et $IB/IO = IO/IA$ par la similitude entre les triangles AIO et OIB dont les angles sont égaux. Maintenant les droites OA' et AA' sont transformées en les droites BB' et OB', perpendiculaires aux précédentes issues de B et O. Donc B' est l'image de A'; l'angle $A'IB'$ est droit. AQT.

Sujet 031. *Production de Chloë.*

On me demande de considérer le point d'intersection de deux droites? Calculons le! La première droite a pour équation $y = t^2/2 + t(x-t) = tx - t^2/2$; la seconde $y = x/t - 1/2t^2$. En égalant, j'obtiens $x(t-1/t) = 1/2(t^2 - 1/t^2)$, d'où $x = 1/2(t+1/t)$ puis $y = 1/2$. Le point est sur cette droite, qui passe par la tangente au point d'abscisse 1 évidemment.

Sujet 035. *Production de Michel.*

Je traduis l'hypothèse, qui concerne deux instants t_0 et t_1 quelconques :

$$C(t_0) - C(t_1) = kC(t_0)(t_1 - t_0)$$

où k est une constante. Je remarque d'ailleurs que la formule du 1 s'obtient aussitôt, avec le bon k; pourquoi l'admettre?

Cependant, fixant t_0, je vois que $C(t)$ est une fonction affine, du type $at + b$. Je reporte :

$$a(t_0 - t_1) = k(at_0 + b)(t_0 - t_1)\ .$$

En simplifiant, je vois que $at_0 + b$ est constant, d'où $a = 0$. Si $k \neq 0$, la concentration est nulle; sinon elle est constante. Mais $C(0) = 1$ et $k = 0,035$. Donc $1 = 0$; je peux dire tout et son contraire. C'est merveilleux !

Production d'Yves.

Je n'ai vraiment pas vu l'intérêt de calculer C_n avant de simuler l'évolution. Je me suis mis tout de suite sur mon tableur pour écrire 1 dans B1 et $k = 0,035$ dans dans C1. Ensuite j'ai mis la suite des nombres entiers dans la colonne A à partir de A2 et recopié cent fois vers le bas = A1 - C$1*A1 dans A2. J'ai regardé sans comprendre ce qu'on pouvait bien me demander de conjecturer que je n'ai pas déjà appris en cours.

Après j'ai réfléchi. Si $C_n = (1-k)^n$, la demi-vie est donnée par $(1-k)^n = 1/2$, soit $n = -\log 2/\log(1-k)$ soit à peu près $0,69/k$, donc à peu près 20 si $k = 0,035$. Pourquoi tout ce cirque?

Production de Quentin.

Je me suis rappelé qu'on avait traité l'exercice en cours de physique et j'ai eu envie de faire autre chose. L'encadrement de la demi-vie entre deux valeurs entières du temps en minutes est-il valide? Certainement pas puisque que l'hypothèse (H) n'est exacte que si $t_1 - t_0$ est infiniment petit. Quelle est l'erreur si $k = 0,035$? La différence entre le $\log(1-k)$ que je trouve ici et le k que j'ai appris en physique est voisine de $k^2/2$, soit 2% en valeur relative. Par ailleurs la valeur de k est sans doute approchée; à 2% près probablement. Il y a une incertitude de 4%. Pour une demi-vie de l'ordre de 20 minutes, donner un nombre entier de minutes est licite comme approximation, mais sans plus.

Sujet 043. *Production de Noëmie.*

Nous avons déjà vu cet dans une banque précédente et notre professeur nous a dit qu'il brillait par sa nullité. Ne voulant rien admettre (pourquoi pas le résultat?), je raisonne par l'absurde en supposant que les points de la courbe sont sur un cercle, autrement dit que $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ implique $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ pour des a, b, R convenables. Je note que pour $0 \leq t \leq 1$, le point de coordonnées t^2 , $(t-1)^2$ est sur la courbe. Je dois donc avoir identiquement

$(t^2 - a)^2 + ((t-1)^2 - b)^2 = R^2$.

J'obtiens successivement en dérivant

$2t(t^2 - a) + 2(t-1)((t-1)^2 - b) = 0,$

$6t^2 - 2a + 6(t-1)^2 - 2b = 0,$

$12t + 12(t-1) = 0.$
C'est absurde et j'ai gagné.

Sujet.047. *Production d'Odile.*

J'appelle x la longueur CM. La partie droite est un triangle semblable à AHC. Son aire est donc de la forme kx^2 où k est une constante ($AH/2CH$ si l'on cherche). J'ai donc à résoudre $kx^2 = a/2$; il y a une seule solution positive.

Sujet 052. *Production de Barbara.*

J'ai d'abord réfléchi aux questions, sans machine et en commençant par la fin.

Si n est pair, l'algorithme donne $n/2 < n$.

Si n est de la forme $4k+1$, l'algorithme donne $12k+4$, $6k+2$, puis $3k+1 < n$.

Et alors? J'imagine que c'était pour montrer que le test de la conjecture pour $n <= N$ peut se limiter aux $4k+3$. Que ne le dit-on pas?

On nous demande d'observer, conjecturer, démontrer pour $n = 2^k$. On nous prendrait pour des débiles? Pour $n = 8k+4$ ou $8k+5$, il n'y a certainement rien d'intéressant; après 2 ou 4 coups on tombe sur $2k+1$ ou $3k+2$, soit le nombre impair ou le nombre congru à 2 modulo 3 le plus général. Et après?

Bref, c'est tellement ennuyeux que j'ai essayé d'écrire un véritable algorithme. Voici.

Introduire n;
affecter à k la valeur n; affecter à l la valeur 0;
tant que $(k > 1)$ et $(l < 1000)$ faire
    $l := l + 1$;
    si k est pair affecter à k la valeur $k/2$
    sinon affecter à k la valeur $3k+1$;
afficher n, l.

J'ai mis la limitation de l à 1000 pour que l'algorithme se termine à coup sûr; si j'obtiens $l = 1000$ je ne pourrai rien conclure; sinon j'aurai la longueur.