EXERCICE 1 : Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.

On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

$2=1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

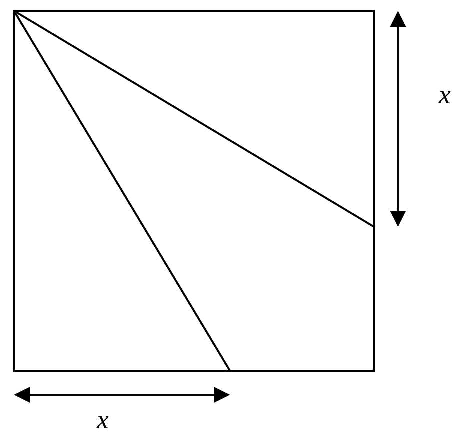
$3=1+2$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\neq 1$; $3=1+1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\neq 1$; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n+2$ et $2n+9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».

   Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

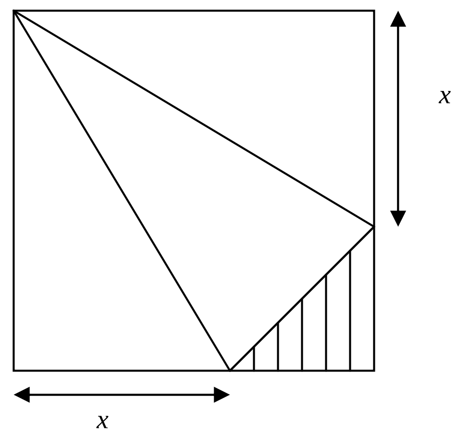
Remarque : pour une résolution complète de ce problème, on pourra consulter la publication *quadrature, n°3, avril 1990.*

EXERCICE 2 : Un partage équitable



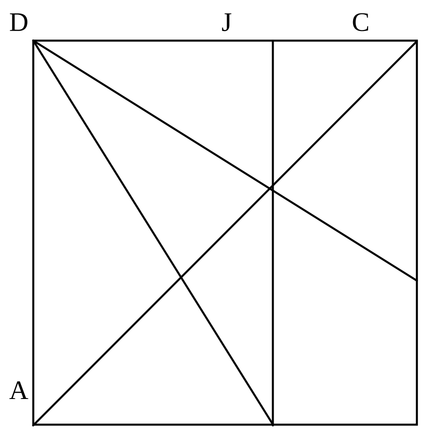
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?



3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).

Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu'en est-il ?

CORRECTION DE L'EXERCICE 1 : Solution

1. $4 = 2 + 2$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ donc $\boxed{\text{4 est bon}}$.

Remarquons que comme $\frac{1}{1} = 1$, 1 est bon mais le nombre 1 ne peut entrer dans une décomposition d'un autre nombre que 1 puisque si $n = 1 + \ldots$, alors $\frac{1}{1} + \frac{1}{\ldots} + \ldots > 1$.

Remarquons aussi que l'ordre n'intervient pas du fait de la commutativité de l'addition donc on peut supposer qu'on écrit n comme une somme $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ avec la condition $2 \le a_1 \le \ldots \le a_k$.

Pour 5, la seule décomposition possible est donc $5 = 2 + 3$ et comme $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq 1$, $\boxed{\text{5 est mauvais}}$.

Pour 6, les décompositions possibles sont :

- $6 = 2 + 2 + 2$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq 1$
- $6 = 2 + 4$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \neq 1$
- $6 = 3 + 3$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq 1$ donc $\boxed{\text{6 est mauvais}}$.

Pour 7, les décompositions possibles sont :

- $7 = 2 + 2 + 3$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq 1$
- $7 = 2 + 5$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \neq 1$
- $7 = 3 + 4$ mais $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \neq 1$ donc $\boxed{\text{7 est mauvais}}$.

Pour 8, les décompositions possibles sont :

- $8 = 2 + 2 + 2 + 2$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq 1$
- $8 = 2 + 2 + 4$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \neq 1$

- $8 = 2 + 3 + 3$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \neq 1$
- $8 = 2 + 6$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \neq 1$
- $8 = 3 + 5$ mais $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \neq 1$
- $8 = 4 + 4$ mais $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \neq 1$ donc $\boxed{\text{8 est mauvais}}$

La décomposition $9 = 3 + 3 + 3$ avec $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ montre que $\boxed{\text{9 est bon}}$

La décomposition $10 = 2 + 4 + 4$ avec $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ montre que $\boxed{\text{10 est bon}}$

2. Il suffit d'écrire $a = b^2 = b \times b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{b \text{ fois}}$ avec $\underbrace{\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{b}}_{b \text{ fois}} = b \times \frac{1}{b} = 1$

   pour justifier que tout carré parfait *a* est bon.

3. Si *n* est bon, $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ avec $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} = 1$, alors

   a. $2n + 2 = 2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_k + 2$ et

   $$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \ldots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} = 1$$

   donc $2n + 2$ est bon.

   b. $2n + 9 = 2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_k + 3 + 6$

   $$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \ldots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} = 1$$

   donc $2n + 9$ est bon.

4. Soit a un nombre tel que $a \geq 55$.

Supposons que tout nombre k de l'intervalle $[\![24;a]\!]$ soit bon.

Comme $24 \leq k \leq a$, il vient donc $50 \leq 2k + 2 \leq 2a + 2$ et $50 \leq a$.

et comme $2k + 2$ est bon, tout nombre pair de l'intervalle $[\![a;2a]\!]$ est bon.

Comme $24 \leq k \leq a$, il vient donc $57 \leq 2k + 9 \leq 2a + 9$ et comme $a \geq 55$ et que 55 est bon, comme de plus $2k + 9$ est bon, tout nombre impair de l'intervalle $[\![a;2a]\!]$ est bon.

Ainsi tout nombre de $[\![a;2a]\!]$ est bon et donc tout nombre de $[\![24;2a]\!]$ est bon.

On agrandit ainsi l'intervalle des bons de $[\![24;a]\!]$ à $[\![24;2a]\!]$.

Or $[\![24;55]\!]$ est un intervalle de bons. Donc $[\![24;110]\!]$, puis $[\![24;220]\!]$ etc…

En réitérant le processus à l'infini, on montre que tout entier naturel supérieur ou égal à 24 finit par être dans un tel intervalle donc est bon.

CORRECTION DE L'EXERCICE 2 :

Question 1 :

Chaque triangle rectangle aura une aire égale au tiers de l'aire du carré.

Il vient $\frac{x \times 1}{2} = \frac{1}{3}$ soit :

$$\boxed{x = \frac{2}{3}}.$$

Question 2 :

L'aire du petit triangle est égale à $\frac{(1-x)^2}{2}$, donc l'aire de chaque triangle rectangle sera le tiers de l'aire restante.

Il vient $\frac{x \times 1}{2} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{(1-x)^2}{2}\right)$ soit $x^2 + x = 1$ soit comme $x > 0$:

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618}$$

Question 3 :

Il existe de multiples solutions (analytiques ou autres…), la plus jolie me semble une application immédiate des propriétés du nombre x, par le seul fait qu'il est solution de $x^2 + x = 1$, et donc sans utiliser sa valeur.

Soit K le point d'intersection des droites (HJ) et (DI).

En appliquant le thèorème de Thalès dans le triangle (ICD), il vient : $\frac{\text{DJ}}{\text{JK}} = \frac{\text{DC}}{\text{CI}}$ soit $\frac{x}{\text{JK}} = \frac{1}{x}$ d'où $\text{JK} = x^2 = 1 - x = \text{JC}$.

Donc le triangle CJK est rectangle et isocèle donc $\widehat{JCK} = 45°$.

Ainsi C, K et A sont alignés. Autrement dit

$$\boxed{\text{les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes}}$$