

Expression du terme de rang n d'une suite récurrente

Situation

On considère une suite récurrente (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_0 et d'une relation de la forme : pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + a \times n + b$, a et b étant deux nombres réels donnés.

On cherche à déterminer, pour tout entier naturel non nul n , l'expression explicite de u_n en fonction de n .

L'étude est proposée pour deux valeurs du couple (a, b) .

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Élaborer un processus itératif;
- Représenter graphiquement les termes d'une suite.

Compétences mathématiques

- Déterminer une fonction polynôme à partir d'informations obtenues sur sa courbe représentative ;
 - Mettre en place une démonstration par récurrence.
-

Recherche d'un lieu géométrique

Situation

Dans le plan (\mathcal{P}), on donne quatre points O , A , B et C et un cercle (Γ) de centre O .

Le point M est un point quelconque variable sur le cercle (Γ). On lui associe l'unique point M' du plan (\mathcal{P}) défini par l'égalité : $\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ où α, β, γ sont des réels donnés.

Il s'agit de déterminer, dans un cas particulier, le lieu géométrique du point M' lorsque le point M décrit le cercle (Γ).

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Réaliser des constructions avec un logiciel de géométrie dynamique ;
- Tester les conjectures émises.

Compétences mathématiques

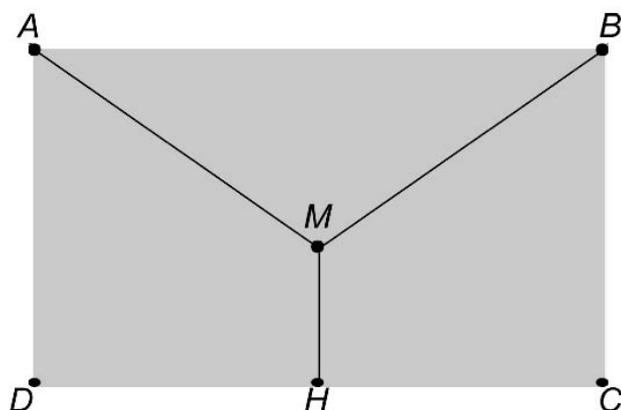
- Utiliser la notion de barycentre et ses propriétés ;
 - Utiliser les transformations géométriques usuelles.
-

Problème d'optimisation

Situation

On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluies pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.

On donne ci-dessous le plan de cette façade.



Sur ce plan, (MH) est la médiatrice de $[DC]$.

Il s'agit de trouver, sur la façade de cette maison, la position du point M qui minimise la longueur totale des tuyaux.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Construire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique ;
- Tester les conjectures émises ;
- Traduire, à l'aide du logiciel, une situation géométrique par un graphique.

Compétences mathématiques

- Émettre une conjecture en croisant des informations variées : observation d'une figure dynamique, données numériques et graphiques ;
 - Élaborer une stratégie permettant de déterminer l'*extremum* d'une fonction.
-

Nombre de solutions d'une équation

Situation

On donne un réel k .

Étude, suivant les valeurs de k , du nombre de solutions de l'équation (E) : $\ln(x) = kx^2$ pour x strictement positif.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Représenter graphiquement des courbes, à l'aide d'un logiciel ;
- Faire une lecture graphique.

Compétences mathématiques

- Interpréter et résoudre graphiquement une équation ;
 - Élaborer une stratégie pour la résoudre.
-

Comportement d'une suite définie par une relation de récurrence

Situation

On considère une suite u_n définie par son premier terme u_0 et par une relation de récurrence du type :

$$u_{n+1} = au_n + b \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont donnés}$$

(on se place dans le cas où la suite converge).

Il s'agit, après avoir conjecturé la valeur de la limite, de se ramener à une suite de type connu pour démontrer la convergence.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Utiliser une calculatrice ou un tableur pour étudier une suite définie par récurrence ;
- Représenter les termes d'une suite récurrente.

Compétences mathématiques

- Reconnaître une suite arithmétique, géométrique ;
 - Déterminer la limite d'une suite.
-

Courbe représentative de la fonction exponentielle

Situation

Il s'agit de rechercher la tangente, passant par l'origine, à la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Représenter graphiquement des courbes et leurs tangentes en un point donné ;
- Émettre et tester des conjectures ;
- Utiliser un tableau de valeurs pour expliciter un contre exemple.

Compétences mathématiques

- Connaître les propriétés de la fonction exponentielle ;
 - Faire le lien entre position relative de courbes et inégalités ;
 - Faire le lien entre dérivée en un point et tangente à la courbe.
-

Planètes et ajustements

Situation

On donne, pour chaque planète du système solaire, sa période de révolution et le rayon de son orbite considérée comme circulaire.

Le but de l'exercice est de retrouver la troisième loi de Kepler en établissant empiriquement une relation entre la période de révolution et le rayon de l'orbite.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Utilisation d'un tableau de nombres, représentation graphique et ajustements.

Compétences mathématiques

- Fonction logarithme népérien ;
 - Équation réduite de droite.
-

Étude d'une marche aléatoire

Situation

Le but de l'exercice est de simuler, à l'aide d'un tableur, des trajets d'un pion sur une droite graduée pour estimer la fréquence d'un événement A , puis de calculer la probabilité de cet événement.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Utiliser des fonctions de simulation d'un tableur ou d'une calculatrice ;
- Construire une feuille de calcul adaptée à la situation.

Compétences mathématiques

- Calculer des probabilités à l'aide d'un schéma de Bernoulli.
-

Simulation d'une expérience, lois de probabilités

Situation

On fait tourner une roue divisée en secteurs identiques numérotés. Le numéro sortant est le résultat d'une épreuve aléatoire dont les issues sont équiprobables.

Il s'agit d'étudier certaines propriétés des lois de probabilité de deux variables aléatoires définies à partir de cette expérience.

Compétences évaluées

Compétences TICE

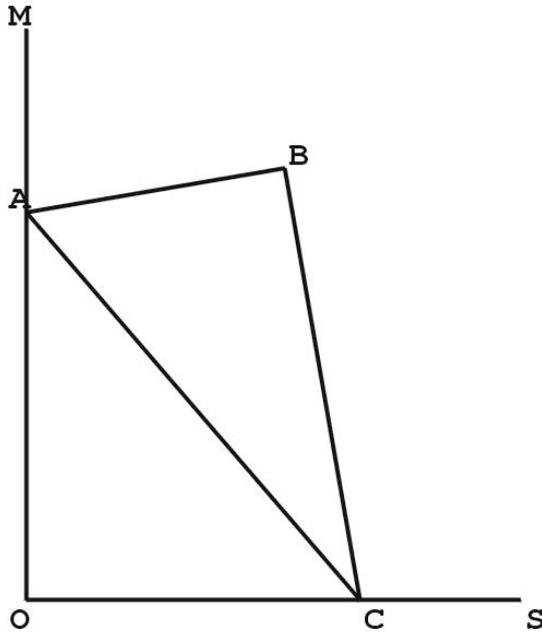
- Utiliser des fonctions de simulation d'un tableur ou d'une calculatrice ;
- Construire une feuille de calcul adaptée à la situation.

Compétences mathématiques

- Déterminer des lois de probabilité de variables aléatoires ;
 - Étudier l'indépendance de deux événements.
-

Étude de lieux géométriques

Situation



Le triangle ABC représente une équerre.

On s'intéresse à l'étude du lieu de certains points de l'équerre lorsque les points A et C glissent respectivement sur les demi-droites perpendiculaires $[OM)$ et $[OS)$.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Construire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique ;
- Visualiser un lieu ;
- Tester les conjectures émises.

Compétences mathématiques

- Exploiter les propriétés du triangle rectangle ;
- Utiliser les lignes trigonométriques dans un triangle.

Orthocentre

Situation

Dans le plan, ABC est un triangle d'orthocentre H .

Il s'agit de déterminer le lieu \mathcal{L} des points H quand C se déplace sur une certaine droite.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Construire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ;
- Visualiser un lieu ;
- Tester les conjectures émises.

Compétences mathématiques

- Connaître et utiliser les points remarquables d'un triangle ;
 - Exploiter les propriétés de la parabole.
-

Distance de deux droites dans l'espace

Situation

On définit, dans l'espace, deux droites particulières (OB) et (AC) non coplanaires. On désigne par M un point variable de la droite (OB) et par N un point variable de (AC) . Il s'agit de déterminer le minimum de la distance MN .

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Construire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace ;
- Utiliser l'aspect dynamique pour faire des conjectures.

Compétences mathématiques

- Connaître la représentation paramétrique d'une droite ;
 - Maîtriser l'orthogonalité dans l'espace.
-

Modélisation d'une situation géométrique

Situation

En géométrie plane, recherche d'un trajet optimal avec deux contraintes différentes suivant les régions du plan dans lesquelles on se déplace.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Réaliser une représentation graphique en choisissant une fenêtre adaptée ;
- Réaliser un tableau de valeurs en choisissant un pas adapté afin de déterminer un minimum ;
- Représenter, sur un même écran, une famille de courbes représentatives.

Compétences mathématiques

- Mettre en équation un problème géométrique donné.
-

Cryptographie

Situation

Le but de cet exercice est le cryptage et décryptage d'un message utilisant le « chiffrement à clef secrète ». On utilisera le codage informatique des lettres avec le code ASCII.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Utiliser les fonctions du tableur (reste d'une division euclidienne, codes ASCII, ...);
- Réaliser une feuille de calcul adaptée à la situation.

Compétences mathématiques

Utiliser les propriétés du programme d'arithmétique :

- congruences,
 - division euclidienne,
 - nombres premiers entre eux.
-

Équation différentielle et méthode d'Euler

Situation

Le but de l'exercice est de mettre en œuvre la méthode d'Euler pour une équation différentielle de type $y' = ay$ (où a est un réel donné) et d'en déduire une valeur approchée.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Utiliser un tableur, notamment ses fonctions graphiques ;
- Réaliser une feuille de calcul adaptée à la situation.

Compétences mathématiques

- Mettre en œuvre les connaissances sur la méthode d'Euler ;
 - Déterminer la primitive d'une fonction, avec condition initiale ;
 - Faire le lien entre la fonction approchée obtenue par la méthode d'Euler et la primitive : évaluer une précision.
-

Suite définie par une moyenne arithmétique

Situation

On considère une suite v donnée et la suite u dont le terme général u_n est la moyenne arithmétique : $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k$.

A partir du calcul des premiers termes et d'une représentation graphique, on demande de conjecturer une expression de u_n en fonction de n , que l'on demande de démontrer.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Utilisation d'un tableur pour obtenir les termes d'une suite définie par une somme ainsi qu'une représentation graphique.

Compétences mathématiques

- Résolution d'un système linéaire d'équations ;
 - Démonstration par récurrence.
-

Barycentre

Situation

On considère A , B et C trois points non alignés du plan et k un réel de l'intervalle $[-1; 1]$. On note G_k le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(A, \alpha_k); (B, \beta_k); (C, \gamma_k)\}$$

où α_k , β_k et γ_k sont des réels dépendant de k , de somme non nulle. Il s'agit de déterminer le lieu des points G_k lorsque k décrit l'intervalle $[-1, 1]$.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour visualiser un lieu de points.

Compétences mathématiques

- Barycentre d'un système de points pondérés ;
 - Étude de fonction.
-

Triangle d'aire maximale

Situation

On considère un triangle ABC isocèle en A de périmètre fixé. Il s'agit de déterminer parmi tous les triangles possibles celui dont l'aire est maximale.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique.

Compétences mathématiques

- Calculs de longueur et d'aire ;
 - Étude des variations d'une fonction.
-

PGCD

Situation

On considère un entier naturel n et deux entiers a et b définis en fonction de n .

Il s'agit de conjecturer les valeurs de n pour lesquelles $\text{PGCD}(a, b)$ prend une valeur donnée et de le démontrer.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Utilisation d'un tableur.

Compétences mathématiques

- Définition du PGCD ;
 - Utilisation des congruences.
-

Famille de cercles

Situation

Dans le plan on considère un triangle OAB rectangle en O et une droite d passant par O .

On note A' et B' les projetés orthogonaux respectifs de A et de B sur d .

Il s'agit de conjecturer puis de démontrer une propriété des cercles C de diamètre $[A'B']$ lorsque d tourne autour de O .

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour conjecturer une propriété.

Compétences mathématiques

- Triangles semblables ;
 - Propriété de conservation d'une similitude (image d'une droite par une similitude) ;
 - Triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle.
-

Tangentes à une parabole

Situation

En géométrie analytique du plan, on considère une parabole (\mathcal{C}) et on étudie le point d'intersection des tangentes à (\mathcal{C}) en deux points dont les abscisses sont liées par une relation simple.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique ;
- Construction de tangentes à une courbe ;
- Visualisation à l'écran de la trace d'un point mobile.

Compétences mathématiques

- Équations de tangentes à la courbe représentative d'une fonction ;
 - Résolution d'un système de deux équations.
-

Section plane d'un tétraèdre et optimisation d'une distance

Situation

Dans l'espace, on donne un tétraèdre $OABC$ et le milieu I de $[AB]$. Soit M un point quelconque du segment $[AC]$. Le plan passant par I et orthogonal à la droite (IM) coupe la droite (OB) en N . On cherche à minimiser la distance MN .

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Constructions géométriques et mesures avec un logiciel de géométrie dynamique.

Compétences mathématiques

- En géométrie analytique, calcul de la distance de deux points de l'espace ;
 - Recherche d'un extremum d'une fonction.
-

Demi-vie

Situation

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse (de courte durée). La concentration du médicament dans le sang est immédiatement maximale, puis elle diminue en fonction du temps. Le but de l'exercice est d'étudier avec un tableur, pour différentes hypothèses, l'évolution de la concentration minute par minute puis de calculer le temps nécessaire pour que la concentration diminue de moitié.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Utilisation de certaines fonctions d'un tableur.

Compétences mathématiques

- Suites géométriques ;
 - Lecture graphique.
-

Étude d'une courbe

Situation

On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points défini par

$$\mathcal{C} = \left\{ M(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \right\}$$

Il s'agit de construire la courbe \mathcal{C} à l'aide d'un logiciel adapté ou d'une calculatrice graphique et de déterminer s'il s'agit ou non d'un quart de cercle (cf. la banque 2004 pour la série S).

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Représenter des courbes sur un même graphique ;
- Utiliser les diverses procédures d'affichage pour émettre une conjecture.

Compétences mathématiques

- Transformation d'une expression algébrique ;
 - Équation d'un cercle ;
 - Raisonnement par contre-exemple.
-

Somme de termes d'une suite

Situation

Le but est de calculer la somme des cubes des n premiers entiers. Il s'agit d'abord de conjecturer la formule à l'aide d'un outil de calcul, puis de démontrer la formule trouvée.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Mettre en place un processus itératif;
- Émettre une conjecture par comparaison de deux listes de nombres.

Compétences mathématiques

- Somme des termes d'une suite arithmétique;
 - Démonstration par récurrence d'une formule explicite.
-

Partage d'un triangle

Situation

Dans le plan on définit un triangle ABC .

On se propose de démontrer qu'il existe une droite et une seule perpendiculaire au côté $[BC]$ qui partage le triangle ABC en deux polygones de même aire.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Réaliser des constructions avec un logiciel de géométrie dynamique ;
- Émettre des conjectures.

Compétences mathématiques

- Résoudre des équations ;
 - Prévoir les variations d'une fonction représentant une grandeur.
-

Suite de Syracuse

Situation

On considère l'algorithme suivant appliqué à un nombre entier n , $n \geq 1$:

Si $n = 1$ le processus s'arrête.
Sinon si n est pair, on le transforme en $\frac{n}{2}$
si n est impair, on le transforme en $3n + 1$.

On itère ce processus jusqu'à obtenir 1 ; on appelle $L(n)$ le nombre d'étapes nécessaires pour aller de n à 1.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés des nombres $L(n)$ pour des valeurs de n particulières.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Mise en place de processus itératifs.

Compétences mathématiques

- Démonstration par récurrence ;
 - Congruences modulo 4.
-

Nombres div'1

Situation

On appelle nombre div'1 tout entier naturel dont un multiple a une écriture décimale ne comportant que le chiffre 1. Dans cet exercice, il s'agit d'abord de reconnaître d'une manière empirique les nombres div'1, puis d'aborder le problème mathématique.

Compétences évaluées

Compétences TICE

- Mettre en place un algorithme arithmétique sur une feuille de calcul ou par un programme sur calculatrice ;
- Mettre en place un test d'arrêt.

Compétences mathématiques (spécialité)

- Mettre en place un raisonnement en arithmétique ;
 - Raisonnement par contre-exemple.
-