

Programme de mathématiques pour la classe de seconde

Année scolaire 2009-2010

Introduction

La seconde est une classe de détermination. Le programme de mathématiques y a pour fonction :

- de conforter l'acquisition par chaque élève de la culture mathématique nécessaire à la vie en société et à la compréhension du monde ;
- d'assurer et de consolider les bases de mathématiques nécessaires à toutes les poursuites d'étude du lycée ;
- d'aider l'élève à construire son parcours de formation.

En accord avec ces diverses fonctions, le programme est constitué d'une partie commune et d'un thème obligatoire au choix à choisir parmi trois thèmes d'études permettant une ouverture vers d'autres domaines des mathématiques et d'autres types de problèmes.

Pour chaque section de la partie commune du programme, **les capacités attendues sont en nombre volontairement limité** et doivent être maîtrisées par tous les élèves car elles constituent la base commune sur laquelle se fonderont l'ensemble des parcours ultérieurs. Pour autant, **l'objectif de formation pour chaque élève est ambitieux** et centré sur la résolution de problèmes. L'acquisition de techniques, certes indispensable, n'est pas un objectif en soi, mais est au service de la pratique du raisonnement qui doit être la base de l'activité mathématique des élèves. En effet, il faut que chaque élève, quels que soient ses projets, puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques et de la simplification que permet la maîtrise de l'abstraction.

Objectif général

L'objectif de ce programme est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de :

- pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique ;
- modéliser et s'engager dans une activité de recherche ;
- conduire un raisonnement, une démonstration ;
- faire une analyse critique ;
- pratiquer une lecture active de l'information (critique, traitement), en privilégiant les changements de registre (graphique, numérique, algébrique, géométrique) ;
- utiliser les outils logiciels (ordinateur ou calculatrice) adaptés à la résolution d'un problème ;
- communiquer à l'écrit et à l'oral.

Raisonnement et langage mathématiques

Le développement de l'argumentation et **l'entraînement à la logique** font partie intégrante des exigences des classes de lycée. À l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant et, par exemple, à distinguer implication mathématique et causalité. Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique **ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques** mais doivent prendre naturellement leur place dans tous les chapitres du programme. De même, le vocabulaire et les notations mathématiques ne doivent pas être fixés d'emblée ni faire l'objet de séquences spécifiques mais doivent être introduits au cours du traitement d'une question en fonction de leur utilité. Comme les éléments de logique mathématique, les notations et le vocabulaire mathématiques sont à considérer comme des conquêtes de l'enseignement et non comme des points de départ. Pour autant, ils font pleinement partie du programme : les exigibles figurent, avec ceux de la logique, à la fin de la partie commune du programme.

Utilisation d'outils logiciels

Le programme a été conçu et écrit pour être enseigné et mis en œuvre avec l'outil informatique. L'utilisation de logiciels (calculatrice, ordinateur), d'outils de visualisation et de représentation, de calcul (numérique ou formel), de simulation, de programmation développe la possibilité d'expérimenter, ouvre largement la dialectique entre l'observation et la démonstration et change profondément la nature de l'enseignement.

L'utilisation de ces outils doit intervenir selon trois modalités :

- par le professeur, en classe, avec un dispositif de visualisation collective adapté ;
- par les élèves, sous forme de travaux pratiques de mathématiques ;
- dans le cadre du travail personnel des élèves hors du temps de classe (par exemple au CDI ou à un autre point d'accès au réseau local).

Par ailleurs, la démarche algorithmique est, depuis les origines, une composante essentielle de l'activité mathématique¹.

Dans le cadre de cette activité algorithmique, les élèves seront entraînés :

- à décrire certains algorithmes en langage naturel ou dans un langage symbolique ;
- à en réaliser quelques uns à l'aide d'un tableur, d'une calculatrice ou d'un logiciel adapté ;
- à interpréter des algorithmes plus complexes.

Aucun langage, aucun logiciel n'est imposé.

Diversité de l'activité de l'élève

La diversité des activités mathématiques proposées :

- chercher, expérimenter – en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;
- raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit ;

doit permettre aux élèves de prendre conscience de la richesse et de la variété de la démarche mathématique et de la situer au sein de l'activité scientifique. Cette prise de conscience est un élément essentiel dans la définition de leur orientation.

Il importe donc que cette diversité se retrouve dans les travaux proposés à la classe. Parmi ceux-ci les travaux écrits faits hors du temps scolaire restent absolument essentiels à toute progression de l'élève. Fréquents mais de longueur raisonnable, ils doivent permettre, à travers l'autonomie laissée à chacun, le développement des qualités d'initiative. Ils doivent être conçus de façon à permettre la prise en compte de la diversité et de l'hétérogénéité des aptitudes des élèves. Il est en particulier indispensable qu'ils permettent la mise en œuvre régulière de l'utilisation des outils logiciels.

Organisation du programme

La partie commune du programme est divisée en sept sections,

- Fonctions 1
- Fonctions 2
- Géométrie 1
- Géométrie 2
- Statistiques et probabilités 1
- Statistiques et probabilités 2
- Algorithmique

Ainsi, trois champs sont constitués chacun de deux sections du programme. Ce découpage est destiné à favoriser l'organisation des apprentissages, mais le respect de l'unité du programme par l'enseignant est essentiel : chaque thème doit nourrir les problèmes proposés aux élèves tout au long de l'année scolaire. Pour ce qui concerne la géométrie dans l'espace, les connaissances et compétences acquises en fin de collège sont suffisantes. Néanmoins, **les configurations de géométrie dans l'espace** – même si aucune entrée nouvelle n'est prévue dans le programme de seconde – doivent être le support de nombreux problèmes faisant intervenir les outils de l'analyse ou de la géométrie plane (voire des statistiques et probabilités) tout au long de l'année scolaire.

Le programme n'est pas un plan de cours et ne contient pas de préconisations pédagogiques. Il fixe les objectifs à atteindre en termes de capacités et donne des indications sur les types de problèmes à proposer aux élèves.

Le programme comprend, outre la partie commune, un ensemble de trois thèmes d'étude, dont l'un au choix doit faire l'objet, sous la direction du professeur, d'un **travail des élèves en classe d'une durée de 15 à 20 heures, s'étendant sur une grande partie de l'année scolaire**, prolongé par des travaux individuels ou en groupes.

¹La partie du programme consacrée à l'algorithmique reprend les préconisations du rapport de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques présidée par Jean-Pierre Kahane (2002) : « L'enseignement des sciences mathématiques ».

1. Fonctions 1

L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier :

- un problème se ramenant à une équation du type $f(x) = k$ dans le cas où la fonction est donnée (définie par une courbe, un tableau de données, une formule) et aussi lorsque toute autonomie est laissée pour associer au problème divers aspects d'une fonction ;
- un problème d'optimisation ou un problème du type $f(x) > k$ et de le résoudre, de façon approchée, à l'aide d'un graphique et de façon exacte, si les variations de la fonction sont connues.

Les situations proposées dans ce cadre sont issues de domaines très variés : géométrie plane ou dans l'espace, biologie, économie, physique, actualité etc. Les élèves doivent être capables d'exploiter les potentialités de quelques logiciels (tableur, traceur de courbes, logiciels de géométrie dynamique, de calcul numérique, de calcul formel).

Par ailleurs, la résolution de problèmes vise aussi à approfondir la connaissance des différents types de nombres et en particulier à distinguer un nombre de ses valeurs approchées, à préparer l'analyse, à progresser dans la maîtrise du calcul algébrique sans recherche de technicité et toujours dans la perspective de résolution de problèmes ou d'apprentissage de la démonstration.

Il s'agit également d'apprendre aux élèves à distinguer la courbe représentative d'une fonction des dessins obtenus avec un traceur de courbe ou comme représentation de quelques données. Autrement dit, il s'agit de faire comprendre que des dessins peuvent suffire pour répondre de façon satisfaisante à un problème concret mais qu'ils ne suffisent pas à démontrer des propriétés de la fonction.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
<p>Fonctions</p> <p>Image, antécédent, courbe représentative.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Traduire le lien entre deux quantités par une formule. <p>Pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule :</p> <ul style="list-style-type: none"> • identifier la variable et, éventuellement, l'ensemble de définition ; • déterminer l'image d'un nombre ; • rechercher des antécédents d'un nombre. 	<p>Les fonctions abordées sont généralement des fonctions numériques d'une variable réelle pour lesquelles l'ensemble de définition est donné.</p> <p>Quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini ou sur \mathbb{N}, voire de fonctions de deux variables (aire en fonction des dimensions) sont à donner.</p>
<p>Étude qualitative de fonctions</p> <p>Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe. • Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations. <p>Lorsque le sens de variation est donné, par une phrase ou un tableau de variations :</p> <ul style="list-style-type: none"> • comparer les images de deux nombres d'un intervalle ; • déterminer tous les nombres dont l'image est supérieure (ou inférieure) à une image donnée. 	<p>Les élèves doivent distinguer les courbes pour lesquelles l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique.</p> <p>Les définitions formelles d'une fonction croissante, d'une fonction décroissante, seront progressivement dégagées. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année.</p>

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Fonctions linéaires et fonctions affines	<ul style="list-style-type: none"> • Donner le sens de variation d'une fonction affine. • Donner le tableau de signes de $ax + b$ pour des valeurs numériques données de a et b. 	<p>Exemples de non-linéarité. En particulier, faire remarquer que les fonctions carré et inverse ne sont pas linéaires.</p> <p>On fait le lien entre le signe de $ax + b$, le sens de variation de la fonction et sa courbe représentative.</p>
Expressions algébriques Transformations d'expressions algébriques en vue d'une résolution de problème.	<ul style="list-style-type: none"> • Associer à un problème une expression algébrique. • Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée) d'une expression en vue de la résolution du problème donné. • Développer, factoriser des expressions polynomiales simples ; transformer des expressions rationnelles simples. 	<p>La maîtrise technique n'est pas la priorité. Les activités de calcul doivent être l'occasion de raisonner. Les élèves apprennent à développer des stratégies s'appuyant sur l'observation de courbes, l'anticipation et l'intelligence du calcul. Le cas échéant, cela s'accompagne d'une mobilisation éclairée et pertinente des logiciels de calcul formel.</p>
Équations et inéquations Résolution graphique et algébrique d'équations. Résolution graphique d'inéquations.	<ul style="list-style-type: none"> • Mettre un problème en équation. • Résoudre une équation se ramenant au premier degré. • Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : $f(x) < k$; $f(x) < g(x)$. 	<p>Pour un même problème, combiner résolution graphique et contrôle algébrique.</p> <p>Utiliser, en particulier, les représentations graphiques données sur écran par une calculatrice, un logiciel.</p>

2. Fonctions 2

Les objectifs fixés dans la section « Fonctions 1 » sont à poursuivre tout particulièrement dans le cadre des fonctions polynômes de degré deux et des fonctions homographiques.

Il s'agit de plus de rendre les élèves capables d'étudier un problème d'optimisation ou « se ramenant à » $f(x) > k$, dans des domaines variés. Cette étude peut être faite, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction.

Distinguer la courbe représentative d'une fonction des dessins obtenus avec un traceur de courbe ou comme représentation de quelques données et avoir compris que des dessins peuvent suffire pour répondre de façon satisfaisante à un problème concret alors qu'ils ne suffisent pas à démontrer des propriétés de la fonction, restent deux objectifs de formation importants.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Fonctions de référence : variations de la fonction carré, de la fonction inverse.	<ul style="list-style-type: none"> • Connaître les variations des fonctions carré et inverse. • Représenter graphiquement les fonctions carré et inverse. • Donner le sens de variations des fonctions dont l'expression est mise sous une forme adaptée (enchaînement des fonctions qui conduisent de x à $f(x)$ explicite). 	Savoir étudier le sens de variation d'une fonction en exploitant l'effet sur l'ordre des fonctions de référence n'est pas un attendu du programme.
Fonctions et formules algébriques.	<ul style="list-style-type: none"> • Identifier la forme la plus adéquate – développée, factorisée, réduite $\left(\alpha(x + \beta)^2 + \gamma, \alpha + \frac{\beta}{x + \gamma}\right)$ – d'une expression en vue de la résolution du problème donné. 	<p>La maîtrise technique n'est pas la priorité. Les activités de calcul doivent être l'occasion de raisonner. Les élèves apprennent à développer des stratégies s'appuyant sur l'observation de courbes, l'anticipation et l'intelligence du calcul. Le cas échéant, cela s'accompagne d'une mobilisation éclairée et pertinente des logiciels de calcul formel.</p> <p>Savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2 n'est pas un attendu du programme.</p>
Résolution algébrique d'inéquations.	<ul style="list-style-type: none"> • Modéliser un problème par une inéquation. • Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit de facteurs du premier degré. • Résoudre algébriquement les inéquations nécessaires à la résolution d'un problème. 	<p>Pour un même problème, il s'agit de :</p> <ul style="list-style-type: none"> • combiner les apports de l'utilisation d'un graphique et d'une résolution algébrique, • mettre en relief les limites de l'information donnée par une représentation graphique. <p>Les fonctions utilisables sont les fonctions polynômes du second degré ou homographiques.</p>

3. Géométrie 1

L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier un problème dont la résolution repose sur des calculs de distance, la démonstration d'un alignement de points ou du parallélisme de deux droites, la recherche des coordonnées du point d'intersection de deux droites, en mobilisant des techniques de la géométrie plane repérée. Il s'agit aussi d'entretenir les acquis du collège en géométrie plane et de renforcer la vision dans l'espace des élèves.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
<p>Coordonnées d'un point du plan Abscisse et ordonnée d'un point dans le plan rapporté à un repère orthonormé.</p> <p>Distance de deux points du plan.</p> <p>Milieu d'un segment.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Repérer un point donné du plan, placer un point connaissant ses coordonnées. • Calculer la distance de deux points connaissant leurs coordonnées. <p>Connaissant les coordonnées des extrémités d'un segment,</p> <ul style="list-style-type: none"> • calculer les coordonnées du milieu. 	
<p>Droites Droite comme courbe représentative d'une fonction affine.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Tracer une droite dans le plan repéré. 	

4. Géométrie 2

L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier un problème d'alignement de points, de parallélisme ou d'intersection de droites, de reconnaissance des propriétés d'un triangle, d'un polygone – toute autonomie pouvant être laissée sur l'introduction ou non d'un repère.

Dans le cadre de la résolution de problèmes, une exploitation des potentialités de logiciels est à proposer, une mise en perspective de plusieurs stratégies de résolution à aménager.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
<p>Équations de droites Droites parallèles, sécantes.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Caractériser analytiquement une droite. • Établir que trois points sont alignés, non alignés. • Reconnaître que deux droites sont parallèles, sécantes. • Déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes. 	<p>On démontre que toute droite a une équation soit de la forme $y = mx + p$, soit de la forme $x = c$.</p>

5. Statistiques et probabilités 1

Les objectifs visés par ce champ du programme sont les suivants :

dans le cadre de l'analyse de données, rendre les élèves capables, à l'occasion de résolutions de problèmes :

- de déterminer et interpréter des caractéristiques d'une série statistique ;
- de réaliser la comparaison de deux séries statistiques à l'aide des caractéristiques de position et de dispersion, ou de la fonction de répartition empirique ;

dans le cadre des probabilités, rendre les élèves capables :

- d'étudier et modéliser des expériences relevant de l'équiprobabilité (par exemple, lancers de pièces ou de dés, tirage de cartes) ;
- de proposer un modèle probabiliste à partir de l'observation de fréquences dans des situations simples.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
<p>Statistique descriptive, analyse de données</p> <p>Caractéristiques de position et de dispersion</p> <ul style="list-style-type: none"> • médiane, quartiles ; • moyenne, écart-type. 	<ul style="list-style-type: none"> • Utiliser un logiciel (par exemple, un tableur) ou une calculatrice pour étudier une série statistique. • Passer des effectifs aux fréquences, calculer les caractéristiques d'une série définie par effectifs ou fréquences. • Calculer des effectifs cumulés, des fréquences cumulées. • Représenter une série statistique graphiquement (nuage de points, histogramme, fonction de répartition empirique). 	<p>L'objectif est de faire réfléchir les élèves sur des données réelles, riches et variées (issues, par exemple, d'un fichier mis à disposition par l'INSEE), synthétiser l'information et proposer des représentations pertinentes.</p> <p>La formule donnant l'écart type est donnée et commentée. Elle n'est pas exigible.</p> <p>Un des buts est de comparer deux séries statistiques par le couple (médiane, quartiles), le couple (moyenne, écart-type) ou par les fonctions de répartition empiriques.</p>
<p>Probabilité sur un ensemble fini</p> <p>Probabilité d'un événement</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Déterminer la probabilité d'événements dans des situations d'équiprobabilité. • Utiliser des modèles définis à partir de fréquences observées. 	<p>La probabilité d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.</p>

6. Statistiques et probabilités 2

Les objectifs visés par cette section du programme sont les suivants :

dans le cadre des probabilités, rendre les élèves capables

- d'interpréter des événements de manière ensembliste,
- de mener à bien des calculs de probabilité ;

dans le cadre de l'échantillonnage

- faire réfléchir les élèves à la conception et la mise en oeuvre d'une simulation,
- sensibiliser les élèves aux notions de fluctuation d'échantillonnage, d'intervalle de confiance et à l'utilisation qui peut en être faite.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
<p>Probabilité sur un ensemble fini</p> <p>Réunion et intersection de deux événements, formule :</p> $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B).$	<ul style="list-style-type: none"> • Connaître et exploiter cette formule. 	<p>Pour les calculs de probabilités, on utilise des arbres, des diagrammes ou des tableaux.</p>
<p>Échantillonnage</p> <p>Notion d'échantillon.</p> <p>Réalisation d'une simulation.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Concevoir, mettre en oeuvre et exploiter des simulations de situations concrètes à l'aide du tableur. • Exploiter et faire une analyse critique d'un résultat d'échantillonnage. 	<p>A l'occasion de la mise en place d'une simulation, on apprend à manipuler de nouvelles fonctions du tableur (ALEA, ENT, SI, NB.SI, OU ...).</p> <p>On introduit une notion d'intervalle de dispersion empirique * au seuil de 95% pour la moyenne d'une population relativement à un caractère donné.</p> <p>L'objectif est d'amener les élèves à un questionnement lors des activités suivantes :</p> <ul style="list-style-type: none"> • l'estimation d'une proportion inconnue à partir d'un échantillon ; • la prise de décision à partir d'un échantillon.

* **L'intervalle de dispersion empirique** au seuil de 95 % pour la moyenne d'un caractère dans un échantillon de taille n est défini de la façon suivante : par simulation sur un grand nombre d'échantillons de même taille n , on détermine l'intervalle central où se trouvent 95% des moyennes observées, c'est-à-dire l'intervalle minimal où se trouvent les moyennes lorsqu'on a enlevé les 2,5 % valeurs les plus basses et les 2,5 % valeurs les plus hautes.

Si le caractère ne prend que deux valeurs 0 ou 1, la moyenne théorique du caractère est la probabilité p qu'il prenne la valeur 1 et la moyenne observée est la fréquence d'apparition. Dans ce cas, le professeur peut faire observer que lors de l'étude d'échantillons de taille $n \geq 25$, si f désigne la fréquence d'apparition d'une issue de probabilité p comprise entre 0,2 et 0,8, alors f appartient à l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ dans au moins 95 % des cas, mais ce résultat n'est pas exigible.

7. Algorithmique

Il s'agit de familiariser les élèves avec les grands principes d'organisation d'un algorithme : gestion des entrées-sorties, affectation d'une valeur et mise en forme d'un calcul, en opérant essentiellement sur des nombres entiers.

L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (fonctions, géométrie, statistiques et probabilité, logique) mais aussi avec les autres disciplines ou la vie courante.

À l'occasion de l'entrée des élèves dans cette partie du programme, il convient de leur donner de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques de vérification et de contrôle.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Calculs sur des nombres entiers Instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie).	<ul style="list-style-type: none"> • Écrire une formule permettant un calcul. • Écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction. 	Il s'agit de coder dans un langage informatique une expression mathématique afin d'en permettre l'évaluation.
Boucle et itérateur	<ul style="list-style-type: none"> • Programmer un calcul itératif, le nombre d'itérations étant donné. 	On peut utiliser les boucles pour calculer un tableau de valeurs d'une fonction ou calculer les valeurs remarquables d'une série statistique.
Instruction conditionnelle	<ul style="list-style-type: none"> • Programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif, avec une fin de boucle conditionnelle. 	On peut utiliser les boucles et instructions conditionnelles pour faire une simulation informatique d'un processus aléatoire, ou manipuler des chaînes de caractères.

Notations et raisonnement mathématiques

Cette partie du programme, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : \in , \subset , \cup , \cap ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A , on utilise la notation des probabilités \bar{A} .

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles \forall , \exists ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Thèmes d'étude

L'objectif de chaque thème d'étude est de :

- faire découvrir aux élèves un domaine de développement des mathématiques ;
- valoriser l'apport des mathématiques pour apporter des solutions à des problèmes de natures variées ;
- présenter des contenus mathématiques de façon attractive, par une approche heuristique et expérimentale et aboutir « naturellement » au besoin d'introduire de nouvelles notions et de nouveaux outils ;
- donner envie aux élèves de poursuivre l'étude des mathématiques pour découvrir d'autres concepts ou approfondir les concepts rencontrés.

Il s'agit de confronter les élèves à des problèmes consistants – mais avec des exigences limitées dans les contenus. Ces problèmes, issus de champs multiples explorés dans différentes disciplines doivent leur permettre de se rendre compte de la richesse et de l'importance des mathématiques dans le monde et leur donner le goût du raisonnement déductif. Les aspects historiques et épistémologiques des thèmes étudiés ne doivent pas être oubliés.

Pour répondre à ces objectifs, une liste de trois thèmes est proposée. Parmi ceux-ci, **le professeur choisit un thème** qui fera l'objet de l'enseignement et de l'activité des élèves en classe pendant une durée de 15 à 20 heures.

Dans chaque thème :

- Différents types de problèmes sont identifiés et des exemples sont proposés. La liste de ces exemples est non limitative et non exhaustive. Le professeur garde une grande liberté de choix en fonction des goûts des élèves et de ses compétences propres.
- Différents contenus mathématiques sont identifiés. Tous ces contenus doivent être abordés au moment où ils s'avèrent utiles et ne doivent pas faire l'objet d'un cours structuré *a priori*. Il importe que seules les connaissances utiles aux problèmes étudiés avec les élèves soient travaillées. L'identification des contenus mathématiques a une fonction limitative, car il est indispensable qu'ils restent adaptés au niveau d'une classe de seconde et au temps imparti.

L'entrée dans le thème doit privilégier une activité de recherche et d'expérimentation autour d'un questionnement.

Les problèmes étudiés doivent combiner des activités de recherche, d'expérimentation – notamment avec des outils logiques –, de raisonnement, de communication et doivent permettre de mettre en œuvre, selon le thème, des méthodes variées : numériques, graphiques, géométriques, logiques ou algorithmiques.

Les activités proposées doivent, dans un premier temps, s'appuyer sur des connaissances et des compétences que les élèves maîtrisent, mais permettent d'en acquérir de nouvelles et d'ouvrir des perspectives.

L'évaluation doit prendre des formes variées afin de tenir compte des qualités recherchées dans cette partie du programme : initiative, engagement dans une démarche de recherche, travail d'équipe, expression mathématique et raisonnement, communication écrite et orale. Il s'agit dans tous les cas d'une évaluation par compétences qui doivent faire l'objet d'une validation. Selon les thèmes, l'évaluation peut prendre en compte, par exemple :

- une activité de modélisation ;
- l'engagement dans toutes les étapes d'une résolution de problème ;
- le travail lors de séances de travaux pratiques ;
- des travaux de recherche personnelle ou en petits groupes hors du temps scolaire donnant lieu, par exemple, à constitution d'un dossier ;
- la présentation écrite ou orale de résultats ;
- la réalisation et la présentation d'un programme informatique.

Thèmes proposés

1. Cryptologie et codage
2. Utilisations de la théorie des graphes
3. Phénomènes d'évolution

Cryptologie et codage

L'objectif de ce thème est de permettre aux élèves – dans des cas simples – de se familiariser avec des méthodes de cryptage et de réaliser concrètement (en autonomie, à la main ou par ordinateur) des opérations de chiffrement, déchiffrement, décryptage et, éventuellement, de codage-décodage et de compression-décompression.

La cryptologie moderne concerne des documents de toutes sortes : textes, images, sons. Le travail est réalisé sur des documents numérisés. La première étape est un codage en un « texte binaire ». La dernière étape d'un déchiffrement ou d'un décryptage est un décodage.

Types de problèmes possibles

- Problèmes de chiffrement et déchiffrement.
- Problèmes de décryptage ;
exemple : méthode des fréquences.
- Problèmes de codage et de compression ;
exemple : codage ASCII, écriture binaire, octale, hexadécimale.

Les problèmes les plus simples concernent le cryptage à clef secrète (monoalphabétique par permutation, polyalphabétique, clef aléatoire). On peut aborder éventuellement le chiffrement à clef publique et clef privée mais, dans ce cas, on se limite à l'exemple du sac à dos.

Dans un premier temps, pour des raisons de simplicité, il semble pertinent de faire travailler les élèves sur des textes alphabétiques, mais il importe de leur faire comprendre ensuite la diversité des types de documents qui peuvent être numérisés – donc cryptés – et, si possible, de les faire travailler sur des exemples, voire des supports, variés.

Contenus mathématiques pouvant être abordés

Parmi les connaissances mathématiques identifiées ci-dessous, seules celles qui sont utiles aux problèmes étudiés par les élèves sont travaillées et seulement au moment où leur usage est pertinent.

Arithmétique

- Écriture des entiers naturels dans le système décimal de position et dans des bases autres que dix (en particulier en base 2, 8 ou 16). Opérations sur les nombres écrits en binaire.
- Permutations d'un ensemble fini : exemples des transpositions, des permutations circulaires. Permutation réciproque.
- Division euclidienne, divisibilité, PGCD.

Algorithmique

- Algorithmes de remplacement dans les chaînes de caractères.
- Opérations sur les nombres binaires.

Utilisation des graphes

L'objectif de ce thème est de permettre aux élèves :

- d'apprendre à modéliser à l'aide de graphes des problèmes connectés avec l'environnement quotidien ;
- de découvrir l'apport de quelques éléments de la théorie des graphes à la résolution de certains problèmes.

La théorie des graphes intervient dans des domaines variés pour apporter des réponses en particulier à des questions d'organisation et d'optimisation.

Types de problèmes possibles

- Problèmes de circuits, de liens, de rencontres entre individus pouvant être modélisés par des graphes orientés ou non, pondérés ou non :
 - ◇ Peut-on trouver un chemin qui emprunte une fois et une fois seulement chaque arête ? exemple : les ponts de Königsberg.
 - ◇ Peut-on minimiser un coût, une distance, un temps ?
- Problèmes d'incompatibilités donnant lieu à une coloration du graphe :
 - ◇ Peut-on trouver un sous-ensemble contenant le plus possible « d'individus » compatibles ?
 - ◇ Comment trouver le nombre minimum de sous-ensembles nécessaires pour ne regrouper dans un même sous-ensemble que des « individus » compatibles ?
 - ◇ Quel est le nombre de couleurs nécessaires pour colorer une carte de sorte que deux pays voisins ne soient pas de la même couleur ?

Contenus mathématiques pouvant être abordés

Parmi les connaissances mathématiques identifiées ci-dessous, seules celles qui sont utiles aux problèmes étudiés par les élèves sont travaillées et seulement au moment où leur usage est pertinent.

Vocabulaire élémentaire sur les graphes

Sommets, sommets adjacents, arête, degré d'un sommet, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe complet, distance de deux sommets, diamètre, sous-graphe stable, graphe connexe, nombre chromatique, chaîne eulérienne. *Les graphes probabilistes et le produit de deux matrices n'ont pas à être abordés dans ce cadre.*

Propriétés

Ces propriétés ne font pas nécessairement l'objet d'une démonstration. Elles peuvent être mises en évidence sur des exemples et énoncées en vue de leur mise en œuvre

- La somme des degrés d'un graphe non orienté est égale à deux fois le nombre d'arêtes du graphe.
- Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à $\delta + 1$, δ étant le plus grand degré des sommets.
- Théorème d'Euler : « Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si, et seulement si, le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2. Un graphe connexe admet un cycle eulérien si, et seulement si, tous ses sommets sont de degré pair ».

Il est possible de présenter un algorithme simple de coloration d'un graphe ou de recherche d'une plus courte chaîne, mais sa programmation effective n'est pas un objectif.

Phénomènes d'évolution

L'objectif de ce thème est de faire étudier aux élèves des phénomènes d'évolution discrète ou continue à travers des problèmes concrets. Ces problèmes aboutissent à une modélisation (par des suites ou des fonctions) à caractère affine, quadratique, géométrique (ou exponentiel).

Les phénomènes d'évolution peuvent concerner le domaine du vivant, le domaine de la physique ou de la chimie, le secteur de l'économie (production et coûts).

Types de problèmes possibles

- Problèmes de modélisation à partir de données ;
exemples : évolution d'un phénomène naturel (réchauffement climatique, désertification), évolution d'une production.
- Problèmes d'évolution sous contraintes ;
exemples : évolution d'une population à ressources limitées, système proie-prédateur.
- Problèmes de prévision ;
exemples : évolution de la concentration d'une solution, d'un taux de radioactivité, évolution d'une tumeur et adaptation d'un traitement thérapeutique.

Contenus mathématiques pouvant être abordés

Parmi les connaissances mathématiques identifiées ci-dessous, seules celles qui sont utiles aux problèmes étudiés par les élèves sont travaillées et seulement au moment où leur usage est pertinent.

- Pourcentage d'évolution.
- Suites arithmétiques, suites géométriques, suites récurrentes.
- Représentations graphiques : courbes, nuages de points.
- Méthode des cohortes fictives (d'un point de vue algorithmique et expérimental).
- Limite d'un processus d'évolution, d'un point de vue graphique ou numérique.
Il est hors de question d'aborder la notion mathématique de limite d'une suite ou d'une fonction.

L'utilisation de logiciels de représentation et de simulation et la mise en œuvre de l'algorithmique et de la programmation sont indispensables.